

TD 3 : SIMPLIFICATIONS

Enregistrez le fichier sous le nom `2012MA350_NOM_Prenom_AAAAMMJJ_TD03_Simplifications` où `NOM` et `Prenom` sont vos nom et prénom sans caractères spéciaux.

- Exercice 1.**
1. Testez les commandes `simplify`, `expand`, `factor` sur $(x+3)(x+2) - 2(x+2)$. Commentez.
 2. La commande `factorial(n)` renvoie la factorielle de n . Testez la commande `simplify`, puis la commande `simplify_factorial` sur $\frac{(n+1)!}{n!}$. Commentez.
 3. Testez successivement les commandes `simplify`, `expand`, `factor`, `simplify_rational` sur la fraction rationnelle $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x+2)(x+1)}$. Commentez.

Exercice 2. Il s'agit d'étudier les puissances rationnelles des réels négatifs.

1. Demandez à SAGE de calculer la racine carrée de 2. Que répond-il lorsque vous lui demandez avec une précision de 100 (à l'aide de la fonction `N`).
2. Même question pour les racines carrée et cubique de -1 .
3. Vous attendiez-vous à ces réponses ?
4. Créez la fonction f qui à x associe $x^{1/3}$. Demandez les valeurs approchées des images de quelques points (en particuliers des négatifs) avec la fonction `N`..
5. Demandez la limite de $f(x)$ en $-\infty$. SAGE est-il cohérent ?
6. Que retourne `simplify_radical` appelée à partir de $(-1)^{(1/3)}$? Comparez avec la commande `simplify`, puis comparez avec les résultats précédents.

Exercice 3. Dans celui-ci, nous allons nous intéresser à la simplification de formule trigonométrique.

1.
 - a. Créez la fonction g qui à un angle x associe $\cos^2 x + \sin^2 x$.
 - b. Évaluez-la en quelques points (sans l'aide de `N`).
 - c. Demandez la limite de $g(x)$ en quelques points dont $+\infty$. Qu'est-ce que SAGE a su faire ?
 - d. Que retourne `simplify_trig` appelée à partir de $g(x)$?
2. Mêmes questions avec $h(x) = \cosh^2 x - \sinh^2 x$. Quelles différences y a-t-il ?
3. À l'aide de `simplify_trig`, déterminez les cosinus, sinus, cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques de la somme de trois et quatre nombres. Faites quelques essais avec `expand_trig` et expliquez ce que fait cette commande.
4. À l'aide de `expand_trig`, déterminez les cosinus, sinus, cosinus hyperboliques et sinus hyperboliques du triple et du quadruple d'un nombre.
5. Maintenant, on souhaite faire le contraire, c'est-à-dire linéariser des expressions contenant des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$.
 - a. Testez la commande `reduce_trig` sur des expressions contenant des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$. Commentez.
 - b. Linéarisez, pour n de 0 à 10 (on utilisera une boucle `for`), les expressions $\cos^n(x)$ et $\sin^n(x)$. Que remarquez-vous ?
 - c. Linéarisez, pour n de 0 à 10, les expressions $\cosh^n(x)$ et $\sinh^n(x)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 4. Appliquez la commande `simplify_full` successivement sur $(x+2)(x+3) - 2(x+2)$, $\frac{(n+1)!}{n!}$, $\frac{x^3 + 3x^2 - 4}{(x+2)(x+1)}$, $(-1)^{1/3}$, $\cos(x+y+z)$ et sur $\cos^2(x) + \sin^2(x)$. Commentez (et comparez avec les commandes utilisées précédemment). Pensez-vous qu'il soit judicieux d'utiliser systématiquement la commande `simplify_full` ?

Exercice 5. La fonction `assume` a pour but de dire à SAGE qu'il doit supposer certaines relations sur les indéterminées utilisées.

1. Que fait la commande `bool(abs(a)==a)` ? Que renvoie-t-elle ?
2. À l'aide de `assume`, demandez à SAGE de supposer que $a \geq 0$. Que renvoie la commande précédente maintenant ?
3. Demandez maintenant de supposer que $a < 0$. Que se passe-t-il ?
4. La commande `forget` permet de faire oublier à SAGE toutes les suppositions faites précédemment. Resupposez que $a < 0$ et relancez la première commande puis `bool(abs(a)==-a)`.
5. Que répond SAGE quand vous lui demandez si $(-1)^{2b}$ est égal à 1.
6. Supposez que b est entier, qui se dit *integer* en anglais, à l'aide de `assume` et recommencez l'étape précédente.
7. À l'aide de `simplify`, dont le but est de réduire une expression sous certaines hypothèses, demandez à SAGE la valeur de $\sin(b\pi)$ sous les hypothèses de la question précédente.
8. Sachant que pair se dit *even* et impaire *odd* en anglais. Faites des suppositions sur b pour que SAGE sache simplifier $\cos(b\pi)$.
9. Après avoir fait tout oublier à SAGE, demandez-lui de calculer la limite de x^b en $-\infty$, que répond-il ?
10. Suggérez des hypothèses sur b qui vont modifier le résultat précédent et testez-les.

Exercice 6. Comme dit précédemment, `expand` permet de développer une expression. À l'inverse `factor` permet d'en factoriser une.

1.
 - a. Demandez à SAGE de développer $(x + y)^{20}$.
 - b. Réciproquement, demandez-lui de factoriser $x^n + y^n$ pour n allant de 1 à 17.
 - c. Quelles sont les expressions n'admettant aucune factorisation ? Conjecturez un résultat général (pouvez-vous prouver cette conjecture ?).
2.
 - a. Demandez à SAGE de factoriser les nombres $2^{2^n} + 1$ pour n allant 0 à 4. Ces nombres sont appelés nombres de Fermat. Que peut-on conjecturer ?
 - b. Confirmez ou infirmez votre conjecture en demandant à SAGE de factoriser les nombres de Fermat pour n allant de 5 à 8.
 - c. Que fait `expand` sur la forme factorisée d'un entier ?
 - d. Déterminez le nombre de 0 apparaissant à la fin de $1000!$. Vous n'avez pas le droit d'afficher ce nombre pour ensuite compter le nombre de 0 (c'est bien trop fastidieux de toute façon).
 - e. Sauriez-vous faire une conjecture en ce qui concerne le nombre de 0 apparaissant à la fin de $n!$ quel que soit n (utilisez SAGE pour faire beaucoup de tests) ? Seriez-vous capable d'écrire une fonction qui prend un entier positif n en argument, et qui renvoie le nombre de 0 apparaissant à la fin de $n!$