

Mathématiques assistées par ordinateur

Matrices II.

Lancer Firefox et aller sur sagemath.ens.uvsq.fr. Se connecter sur SAGE, et créer une nouvelle feuille sous le nom habituel. Commencer par rentrer la commande `automatic_names(True)`.

Vous devez mettre des commentaires pour indiquer tout ce qu'on fait.

Exercice 1.

1. À l'aide de la commande `matrix`, créer la matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbb{Q})$ suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 306 & -66 & -252 & -132 & 234 \\ 188 & -43 & -106 & -81 & 132 \\ 118 & -8 & -56 & -66 & 102 \\ 56 & -1 & -22 & 33 & 24 \\ -70 & 35 & 140 & 45 & -60 \end{pmatrix},$$

et calculez son rang. Cette matrice est-elle inversible ?

- (a) Testez la commande `kernel` sur la matrice A . Que pensez-vous que cette commande fasse (n'hésitez pas à chercher la traduction du terme "kernel"..) ?
 - (b) Créer le vecteur v qui a les mêmes coordonnées que le vecteur rendu au-dessus. Calculer Av et ${}^t v A$. Qu'en déduisez-vous en réalité sur la commande `kernel` ? Qui est v en réalité ?
 - (c) Aurait-on pu se rendre compte de ce phénomène en testant `kernel` sur des matrices non-carrées. Faites des essais et expliquez.
 - (d) Expliquez pourquoi on n'a jamais été confronté à ce problème jusqu'à maintenant (c'est-à-dire en utilisant les commandes `det` et `rank`).
2. Dorénavant, on fera attention à appeler les fonctions de SAGE sur ${}^t A$ quand le résultat est différent pour A et ${}^t A$.
 - (a) Trouver le véritable noyau de A de deux façons différentes (avec la commande `kernel`, ou avec la commande `right_kernel`) ; utilisez la commande `column_space` pour calculer l'image de A (expliquez précisément le résultat que Sage vous donne).
 - (b) Calculer le polynôme caractéristique de A et le factoriser.
 - (c) Donnez les valeurs propres de A et trouvez des vecteurs propres associés.
 - (d) Construire si possible P et D telles que P est inversible, D est diagonale et $A = PDP^{-1}$.

3. Soit B_m la matrice suivante

$$\begin{pmatrix} m & 2 & 1 \\ 1 & m & 2 \\ 2 & 1 & m \end{pmatrix}$$

où m est un paramètre. Pour la créer, il faut dire à SAGE qu'elle est à coefficients dans $\mathbb{Q}[m]$ (noté `QQ[m]` par SAGE).

- (a) Calculer son polynôme caractéristique.
- (b) En déduire son noyau suivant les différentes valeurs de m .
- (c) Mêmes questions en supposant B_m à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}[m]$ (noté `GF(2)[m]`).

Exercice 2.

Soient les matrices $M_{(a,b)}$

$$M_{(a,b)} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

créées à l'aide de la commande `M=matrix(2, [a,-b,b,a])`.

1. Que fait la commande `M(a=1, b=2)` ?
2. Calculer $M_{(0,1)}^2$.
3. Calculer le déterminant de $M_{(a,b)}$.
4. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $M_{(a,b)}$ admette un inverse.

5. Comparer $M_{(a,b)}^{-1}$, $M_{(a,-b)}$ et ${}^t M_{(a,b)}$.
6. Vérifier que $M_{(a,b)} + M_{(c,d)} = M_{(a+c,b+d)}$.
7. Calculer $M_{(a,b)} M_{(c,d)}$.
8. À quoi cela vous fait-il penser ?

Exercice 3.

Soient les matrices $M_1, \dots, M_5$ à coefficients dans $\mathbb{Q}[m]$ suivantes :

$$(1), \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ m & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ m & m & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 1 \\ m & m & m & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 & 1 & 1 \\ m & m & 1 & 1 & 1 \\ m & m & m & 1 & 1 \\ m & m & m & m & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer leurs déterminants.
2. Conjecturer le déterminant de M_r la matrice $r \times r$ suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ m & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ m & \cdots & m & 1 \end{pmatrix}$$

3. Prouver la conjecture, si possible.

Exercice 4.

1. À l'aide la commande `random_matrix`, créer une matrice carrée aléatoire A sur $\mathbb{Q}$.
2. Calculer $\text{tr}({}^t A A)$.
3. Exécuter plusieurs fois les deux instructions précédentes. Que peut-on conjecturer sur $\text{tr}({}^t A A)$?
4. Prouver cette conjecture.

Exercice 5 (racines carrées de I).

Soit $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il s'agit de trouver les matrices A (si elles existent) telles que $A^2 = I$.

5.1 Expliquer ce que font les commandes suivantes.

```
var('a,b,c,d')
I=matrix(2,2,1);I
A=matrix([[a,b],[c,d]]);A
A2=A^2;A2
Z=A2-I;Z
eqs=[Z[i,j] for i in range(2) for j in range(2)];eqs
sols=solve(eqs);sols
sols=solve(eqs,[a,b,c,d]);sols
sols=solve(eqs,[a,b],solution_dict=True);sols
len(sols)
sol=sols[0];sol
Asol=A.subs(sol);Asol
Asol^2
bool(Asol^2==I)
```

5.2 Expliquer l'intérêt de l'option `solution_dict=True`.

5.3 Donner des exemples avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, dont des exemples avec $c \neq \pm 1$ (ces exemples doivent être différents de ceux des autres étudiants).

5.4 Il y a un cas qui n'est pas résolu par la méthode précédente, lequel ? Le résoudre avec SAGE.

Exercice 6 (racines carrées de $-I$).

Trouver les matrices B (si elles existent) telles que $B^2 = -I$.

Exercice 7 (calcul du déterminant par Laplace).

On va écrire une fonction qui calcule le déterminant d'une matrice par la méthode du développement de Laplace.

7.1 Rappeler rapidement comment calculer le déterminant d'une matrice en développant par rapport à la première colonne.

7.2 Expliquer ce que fait la fonction suivante, en la testant sur plusieurs exemples (ces exemples doivent être différents de ceux des autres étudiants).

```
def my_sous_matrice(A,i,j):
    if not(is_Matrix(A)):
        return "ce n'est pas une matrice"
    nl=nrows(A)
    nc=ncols(A)
    if not(0<=i<nl and 0<=j<nc):
        return "indice(s) incorrect(s)"
    res=A.matrix_from_rows_and_columns(range(0,i)+range(i+1,nl),range(0,j)+range(j+1,nc))
    return res
```

7.3 Expliquer ce que fait la fonction suivante, en la testant sur plusieurs exemples (ces exemples doivent être différents de ceux des autres étudiants).

```
def est_matrice_carree(A):
    if not(is_Matrix(A)):
        return False
    if nrows(A)<>ncols(A):
        return False
    return ncols(A)
```

7.4 Expliquer ce que fait la fonction suivante, en la testant sur plusieurs exemples (ces exemples doivent être différents de ceux des autres étudiants).

```
def mydet(A):
    n=est_matrice_carree(A)
    if n==False:
        return "ce n'est pas une matrice carrée"
    if n==1:
        return A[0,0]
    res=0
    for i in range(n):
        res = res + (-1)^(i+0)*A[i,0]*mydet(my_sous_matrice(A,i,0))
    return res
```

7.5 Définir une fonction `mydet2(A)` qui calcule le déterminant en développant par rapport à la première ligne. La tester sur plusieurs exemples (ces exemples doivent être différents de ceux des autres étudiants).

Exercice 8.

8.1 Expliquer ce que font les commandes suivantes.

```
n=2; A=matrix(n,n,lambd i,j:var('a_'+str(i))+var('b_'+str(j))); A
```

8.2 Au moyen d'une boucle `for`, calculer `det(A)` pour n allant de 1 à 20. Quelle conjecture peut-on formuler ? Peut-on démontrer cette conjecture avec SAGE ? Pourquoi ?

Exercice 9.

S'inspirer de l'exercice précédent pour analyser $\det(A)$ où $a_{ij} = (\alpha + i + j)^2$.