UVSQ 2012/2013
L2 S3 MA350 **TD 6**

Mathématiques assistées par ordinateur

Matrices III.

Lancer Firefox et aller sur sagemath.ens.uvsq.fr. Se connecter sur SAGE, et créer une nouvelle feuille sous le nom habituel. Commencer par rentrer la commande `automatic_names(True)`.

Vous devez mettre des commentaires pour indiquer tout ce qu'on fait.

Exercice 1.

1.1 Calculer et factoriser le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_0^2 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

pour plusieurs valeurs de n.

1.2 Que peut-on conjecturer ?

1.3 En supposant vraie la conjecture, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice soit inversible.

Exercice 2.

2.1 Calculer et factoriser le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x & x^2 & \dots & x^k \\ 1 & x^2 & x^4 & \dots & x^{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x^k & x^{2k} & \dots & x^{k^2} \end{pmatrix}$$

pour plusieurs valeurs de n.

2.2 Que peut-on conjecturer ?

2.3 En supposant vraie la conjecture, donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice soit inversible.

Exercice 3 (critère d'inversibilité de Hadamard).

Soit A une matrice carrée de taille n. Un théorème de Hadamard affirme que si pour tout i on a

$$|a_{i\,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i\,j}|,$$

alors la matrice A est inversible.

3.1 Montrer que cette condition n'est pas nécessaire, en donnant un contre-exemple (il doit être différent de celui des autres étudiants).

3.2 Définir une fonction `critere_Hadamard(A)` qui répond selon les cas « Ce n'est pas une matrice carrée », « La matrice est inversible selon le critère de Hadamard » ou « Hadamard ne permet pas de savoir si la matrice est inversible ».

Exercice 4.

Il s'agit d'inverser la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 1 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.1 Pour cela, expliquer ce que font les commandes suivantes.

```
B=matrix(QQ,3,3,[2,0,3,-1,4,1,3,-5,1]);B
I3=identity_matrix(QQ,3);I3
G=block_matrix([B,I3],ncols=2);G
ligne=0;ligne
pivot=G[ligne,ligne];pivot
G[ligne,:]=G[ligne,:]/pivot;G
G.add_multiple_of_row(1,ligne,-G[1,ligne]);G
G.add_multiple_of_row(2,ligne,-G[2,ligne]);G
ligne=ligne+1;ligne
pivot=G[ligne,ligne];pivot
G[ligne,:]=G[ligne,:]/pivot;G
G.add_multiple_of_row(0,ligne,-G[0,ligne]);G
G.add_multiple_of_row(2,ligne,-G[2,ligne]);G
ligne=ligne+1;ligne
pivot=G[ligne,ligne];pivot
G[ligne,:]=G[ligne,:]/pivot;G
G.add_multiple_of_row(0,ligne,-G[0,ligne]);G
G.add_multiple_of_row(1,ligne,-G[1,ligne]);G
Bi=G.matrix_from_columns([3..5]);Bi
B*Bi
inverse(B)
```

4.2 Que se passe-t-il si l'on enlève `QQ` dans les définitions de `B` et de `I3` ? Pourquoi ?

Exercice 5.

En suivant la méthode précédente, inverser la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 24 \\ -8 & 32 & 8 \\ 24 & -40 & 11 \end{pmatrix}.$$

Que se passe-t-il ? Pourquoi ? Que vaut $\det(C)$?

Exercice 6 (pour les pros).

1. Écrire une fonction `moninverse(A)` qui calcule l'inverse d'une matrice carrée d'ordre m par la méthode précedente, ou bien donne une erreur si elle n'est pas inversible. Il est interdit d'utiliser les commandes `det` et `inverse` et leurs équivalents, évidemment.
   Tester votre méthode sur les matrices rationnelles suivantes
   $$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 2 & \frac{7}{2} \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
2. Est-ce que la fonction `moninverse(A)` fonctionne sur la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$?
   Si ce n'est pas le cas, corriger la définition (indications :`A.swap_rows(i,j)`).
   La tester sur plusieurs matrices où l'utilisation de `swap_rows` est indispensable.

Exercice 7 (pour les pros aussi).

Il est préférable d'avoir fait l'exercice TD2Ex8 avant de commencer celui-ci. Dans TD2Ex8, on a étudié une méthode permettant (sous certaines conditions) de calculer rapidement une bonne approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$, pour une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. On va ici la généraliser pour des fonctions de plusieurs variables, c'est-à-dire qu'on va essayer d'approcher des solutions d'équations de la forme $f(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0)$. Dans la suite, f désigne une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$.

1. Quel est l'analogue de la dérivée pour $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$? En déduire l'analogue de la formule trouvée à la question 3 de TD2Ex8.
2. En déduire un analogue de la fonction `Newton` de la question 5 de TD2Ex8.
3. Calculer une approximation numérique des solutions du système $\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ x^2 - 2x + y^2 & = 0 \end{cases}.$
4. Quel est l'analogue de la racine carrée pour une matrice ? Comment utiliser la méthode précédente pour calculer des racines carrées de matrices ? Quelles matrices ont toujours des racines carrées ?