

Fonctions Sage élémentaires

TD 1

1 Polynômes à une variable

Fonctions utiles : `degree`, `leading_coefficient`, `coefficients`, `coeffs`, `expand`, `factor`, `gcd`, `quo`, `rem`.

Exercice 1. Soient les polynômes $P_1 = x^6 + 2x^5 - 2x^4 + 2x^2 - 2x - 1$ et $P_2 = x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2$.

1. Déterminer le degré, le coefficient dominant et la liste des termes de $P = P_1 P_2$.
2. Effectuer la division euclidienne de P_1 par P_2 .
3. Calculer $Q = \text{PGCD}(P_1, P_2)$.
4. Factoriser P . Calculer $P(2)$.

Exercice 2. Que fait la procédure suivante? Quels sont les arguments de la procédure? Comment les variables sont elles initialisées? Quelle est la condition d'arrêt de la boucle? Que doit renvoyer la procédure?

```
def euclidepol (A,B) :
    A0 = A; A1 = B;
    S0 = 1; S1 = 0;
    T0 = 0; T1 = 1;
    while A1 != 0 :
        Q = A0//A1;
        U = A1;
        A1 = A0 - Q*A1;
        A0 = U; U = S1;
        S1 = S0 - Q*S1;
        S0 = U; U = T1;
        T1 = T0 - Q*T1;
        T0 = U;
    return (A0, S0, T0);
```

Exercice 3. Soit le polynôme $P = x^{11} + x^{10} + x^9 + 2x^8 + 2x^6 + 2x^4 + x^2 + x^3 + x$.

1. Factoriser P dans $\mathbb{Z}[x]$.
2. Factoriser P dans $\mathbb{Z}[i][x]$ et dans $\mathbb{Q}(i)[x]$.
3. Factoriser P dans $\mathbb{F}_2[x]$.
4. Factoriser P dans $\mathbb{F}_4[x]$.

Exercice 4. Soit le polynôme $P = x^7 + x^5 + 2x^3 + 2x^2 + 3x + 2$.

1. Factoriser P dans \mathbb{F}_2 et \mathbb{F}_7 .
2. En déduire une preuve de l'irréductibilité de P dans $\mathbb{Z}[x]$.
3. Vérifier l'irréductibilité de P avec SAGE.

Exercice 5. Soit p un nombre premier. Factoriser $x^p - p$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{F}_p[x]$.

Exercice 6. Soit p un nombre premier. Factoriser le polynôme $x^{2p} + x^p + 1$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{Z}[x]$.

2 Polynômes à plusieurs variables

Exercice 7. Soit le polynôme $P = xy^5 + 2y^4 + 3y^3x^3 + 4x^2y^2 + 5x^12 + 6yx^3 + 7y$.

1. Donner le degré total de P .
2. Écrire P comme polynôme en x .

Exercice 8. Transformer le polynôme $P = (x^2 + xy + x + y)(x + y)$ avec SAGE sous les formes suivantes :

1. $x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2 + 2xy + y^2$;
2. $(x + 1)(x + y)^2$;
3. $y^2 + (2y + y^2)x + (1 + 2y)x^2 + x^3$;
4. $x^3 + x^2 + (2x^2 + 2x)y + (x + 1)y^2$.

Exercice 9.

1. Soit le polynôme $P = xy^5 + 2y^4 + 3y^3x^3 + 4x^2y^2 + 5x^12 + 6yx^3 + 7y$.
 - a) Ordonner P pour l'ordre lexicographique.
 - b) Ordonner P pour l'ordre lexicographique gradué.
 - c) Ordonner P pour l'ordre lexicographique inverse gradué.
 - d) Montrer qu'en deux variables, l'ordre lexicographique gradué et l'ordre lexicographique inverse gradué coïncident.
2. Soit le polynôme $Q = xy^3zt + x^2yz^3t + x^2yz^2t + x^3z^2t^2$.
 - a) Ordonner Q à la main pour l'ordre lexicographique gradué.
 - b) Ordonner Q à la main pour l'ordre lexicographique inverse gradué.