J. Berthomieu, A. Greuet

Ordres admissibles

TD 2

1 Préliminaire sur les ordres admissibles

Exercice 1.

1. Soit le polynôme $P = xy^5 + 2y^4 + 3y^3x^3 + 4x^2y^2 + 5x^{12} + 6yx^3 + 7y$.
   a) Ordonner P pour l'ordre lexicographique.
   b) Ordonner P pour l'ordre lexicographique gradué.
   c) Ordonner P pour l'ordre lexicographique inverse gradué.
   d) Montrer qu'en deux variables, l'ordre lexicographique gradué et l'ordre lexicographique inverse gradué coïncident.
2. Soit le polynôme $Q = xy^3zt + x^2yz^3t + x^2yz^2t + x^3z^2t^2$.
   a) Ordonner Q à la main pour l'ordre lexicographique gradué.
   b) Ordonner Q à la main pour l'ordre lexicographique inverse gradué.

Exercice 2. Soit $\succ$ un ordre total compatible avec la multiplication. Montrer que $\succ$ est un ordre admissible si et seulement si pour tout monôme m non constant, $m \succ 1$.

Exercice 3. Montrer que l'ordre lexicographique est un ordre admissible.

Exercice 4.

1. Soient $g = x - y$, $h = x - y^2$ et $p = xy - x$ dans $\mathbb{Q}[x, y]$ muni de l'ordre lexicographique.
   a) À quoi correspond la commande `p.reduce([g, h])` ?
   b) À quoi correspond la commande `p.reduce([h, g])` ?
2. Soient $g = x^2y^2 - x$, $h = xy^2 + y$ et $p = x^3y^2 + 2xy^4$.
   a) Calculer *à la main* la réduction de p par $[g, h]$, puis celle de p par $[h, g]$.
   b) Comparer avec `p.reduce([g, h])` et `p.reduce([h, g])`.

Exercice 5. Déterminer quel ordre monomial (`lex`, `deglex`, `degrevlex`) a été utilisé pour ordonner les termes des polynômes suivants :

1. $f(x, y, z) = 7x^2y^4z - 2xy^6 + x^2y^2$.
2. $f(x, y, z) = xy^3z + xy^2z^2 + x^2z^3$.
3. $f(x, y, z) = x^4y^5z + 2x^3y^2z - 4xy^2z^4$.

Exercice 6.

1. Montrer que tout polynôme $f \in k[x, y, z]$ peut s'écrire sous la forme
$$f = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3) + r$$
avec $h_1, h_2 \in k[x, y, z]$ et $r \in k[x]$.
2. Trouver une écriture explicite de la forme $z^2 - x^4y = h_1(y - x^2) + h_2(z - x^3)$.

2 Représentation matricielle des ordres admissibles.

Exercice 7. *Matrices de poids*
On étend l'ordre lexicographique $>_{\text{lex}}$ à $\mathbb{R}^n$ de la façon évidente. On définit une relation sur les monômes à n variables à partir d'une matrice A carrée réelle de taille n comme suit :

$$x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \underset{A}{\succ} x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n} \iff A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} >_{\text{lex}} A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}.$$

1. a) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ et $\det A = 0$ alors $\underset{A}{\succ}$ n'est pas un ordre admissible.
   b) Quelles conditions (nécessaires et suffisantes) doit vérifier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ pour que l'ordre associé soit un ordre admissible ?
2. a) Pour $n \geq 2$, trouver $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\underset{A}{\succ}$ soit un ordre admissible.
   b) Quelles conditions (nécessaires et suffisantes) doit vérifier $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour que l'ordre associé soit un ordre admissible ?
3. Donner successivement un exemple de matrice A tel que l'ordre associé soit l'ordre `lex`, `deglex`, `degrevlex`, un ordre produit (avec à chaque fois $x_1 > \cdots > x_n$).

3 Idéaux monomiaux

Exercice 8. Soit $I = \langle x^\alpha, \alpha \in A\rangle$ un idéal monomial et S l'ensemble des exposants qui apparaissent dans I. On considère un ordre monomial. Montrer que le plus petit élément de S appartient à A.

Exercice 9. Dans l'anneau $k[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m]$ on considère l'ordre défini par l'ordre `lex` sur les x_i et par l'ordre `degrevlex` (noté $>_{drl}$) sur les y_j :

$$x^\alpha y^\beta > x^\gamma y^\delta \iff x^\alpha >_{lex} x^\gamma \text{ ou } x^\alpha = x^\gamma \text{ et } y^\beta >_{drl} y^\delta$$

Montrer que $>$ est un ordre monomial.

Exercice 10. Nous allons adopter une représentation distribuée creuse pour les polynômes : un monôme sera représenté par une liste à deux éléments. Le premier est le coefficient et le second la liste des exposants.

1. Écrire une fonction qui teste si un monôme m_1 est plus petit qu'un monôme m_2 pour l'ordre lexicographique.
2. Écrire une fonction qui, étant donnée une liste de monômes, renvoie son plus petit élément m.
3. Écrire une fonction qui, étant donnée une liste de monômes, énumère les monômes dans l'ordre croissant pour l'ordre lexicographique.