Variétés affines et systèmes polynomiaux

TD 4

1 Résultants et élimination

Exercice 1.

1. Calculer une base de Gröbner réduite de l'idéal engendré par $(x+y-z; x^2-2t^2; y^2-5t^2)$ pour l'ordre lexicographique induit par $x > y > z > t$.
2. En déduire que $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ est un nombre algébrique sur le corps des rationnels $\mathbb{Q}$, en exhibant un polynôme à une variable à coefficients rationnels dont il est racine.
3. Quel est le résultant de $(y-z)^2-2$ et y^2-5 par rapport à y ?
4. En déduire que $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{5})$. Exprimer $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ en fonction de $\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

Exercice 2. Soient A et B deux polynômes de $K[X]$, où K est un corps.

1. Fabriquer un polynôme dont les racines sont les sommes d'une racine de A et d'une racine de B. (Quels sont les Y tels que le système $A(X) = B(Y-X) = 0$ ait une solution ?)
2. Fabriquer un polynôme à coefficients entiers qui a $2^{1/2}+7^{1/3}$ pour racine.

Exercice 3. Le degré (resp. le poids) du monôme non nul $ax_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n}$ est $\sum \alpha_i$ (resp. $\sum i\alpha_i$). Le degré (resp. le poids) d'un polynôme est le maximum des degrés (resp. des poids) de ses monômes non nuls. Un polynôme $P \in k[x_1,\dots,x_n]$ est dit symétrique si pour toute permutation

$$\sigma \in S_n, P(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)}) = P(x_1,\dots,x_n).$$

Pour $1 \leq k \leq n$, on note $S_k = \sum_{1\leq i_1<\cdots<i_k} x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ le k-ième polynôme symétrique élémentaire.

1. Si P est symétrique, montrer que le degré par rapport à n'importe quel variable est le même. Ce degré est appelé degré partiel de P.
2. Montrer que pour tout polynôme $P \in k[x_1,\dots,x_n]$ symétrique de degré d, il existe un unique polynôme $F \in k[x_1,\dots,x_n]$ tel que

   $$P(x_1,\dots,x_n) = F(S_1,\dots,S_n)$$

   où F est de poids d et de degré le degré partiel de P.

Exercice 4. Déterminer à l'aide d'un résultant l'intersection des courbes de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$f(X,Y) = X^4+Y^4-1,\ g(X,Y) = X^5Y^2-4X^3Y^3+X^2Y^5-1.$$

Exercice 5. On considère la courbe plane d'équation rationnelle

$$\Big\{\Big(x = a(t)/b(t), y = c(t)/d(t)\Big) \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

1. Comment trouver une équation implicite de la courbe ?
2. On considère la paramétrisation rationnelle

$$\begin{cases} x = \dfrac{u^2}{v} \\ y = \dfrac{v^2}{u} \\ z = u \end{cases}$$

   a) Vérifier que les points (x, y, z) sont sur la surface $x^2y = z^3$.
   b) Soit I l'idéal $\langle vx - u^2, uy - v^2, z - u\rangle$. Calculer $I_2 = I \cap \mathbb{R}[x, y, z]$.
3. Expliciter l'exemple $x = t^2 + t + 1$, $y = (t^2 - 1)/(t^2 + 1)$.

Exercice 6. Donner l'aire d'un triangle en fonction des longueurs a, b, c de ses trois côtés.

Exercice 7. Soit K un corps infini, $P \in K[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme non nul de degré d.

1. Montrer qu'il existe $(a_1, ..., a_{n-1})$ dans K^{n-1} tel que le polynôme $P(X_1 + a_1X_n, \cdots, X_{n-1} + a_{n-1}X_n, X_n)$ soit de la forme $cX_n^d + Q$, où c est un élément non nul de K et Q un polynôme de degré $< d$ par rapport à X_n.
2. En utilisant un résultant en déduire le théorème des zéros de Hilbert.

2 Variétés affines

Exercice 8. En utilisant Sage, donner les solutions des équations suivantes :

1. $x^3 - 1 = 0$.
2. $x^3 - 5ax^2 + x = 1$.
3. $x^7 - 2x^6 - 4x^5 - x^3 + x^2 + 6x + 4 = 0$.

Exercice 9. En utilisant Sage, donner les solutions des systèmes d'équations suivants :

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25, \\ x^2 - 9 = y. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x - y, \\ z^2 = x + y. \end{cases}$
3. $\begin{cases} cx + xy^2 + xz^2 = 1, \\ cy + yx^2 + yz^2 = 1, \\ cz + zx^2 + zy^2 = 1. \end{cases}$ où c est un paramètre réel.

Exercice 10. Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

$$y^2 = x^3 - 28.$$

Exercice 11. On considère la surface S paramétrée par

$$\begin{cases} x = (2 + \cos u)\cos t, \\ y = (2 + \cos u)\sin t, \\ z = \sin u \end{cases}$$

et la courbe C tracée sur S et paramétrée par

$$\begin{cases} x = (2 + \cos 2s)\cos 3s, \\ y = (2 + \cos 2s)\sin 3s, \\ z = \sin 2s. \end{cases}$$

1. Obtenir une équation implicite de S.
2. Obtenir des équations implicites de C.
3. Vérifier à l'aide de ces équations que $C \subset S$.

Exercice 12. Soient les idéaux de $k[x, y]$:

$$I = \left\langle x^2y + xy^2 - 2y; x^2 + xy - x + y^2 - 2y; xy^2 - x - y + y^3 \right\rangle \text{ et } J = \left\langle x - y^2; xy - y; x^2 - y \right\rangle.$$

Montrer que $I = J$.

Exercice 13. Soient les idéaux de $k[x, y, z]$:

$$I = \left\langle x^2 + xz; y + y^4 + xz^2 - 3z; y + 2x^2y^2 + xz^2 \right\rangle \text{ et } J = \left\langle x^3 + yz + xy; xyz + 2y^2z^2 - 3x; x^3y - z^2 \right\rangle.$$

1. Montrer que $I \neq J$.
2. A-t-on $I \subset J$?
3. A-t-on $J \subset I$?

Exercice 14. Soient a, b, c satisfaisant le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 5 \\ a^3 + b^3 + c^3 = 7 \end{cases}$$

1. Montrer que $a^4 + b^4 + c^4 = 9$.
2. Montrer que $a^5 + b^5 + c^5 \neq 11$.
3. Que valent $a^5 + b^5 + c^5$ et $a^6 + b^6 + c^6$?