Résolution des systèmes d'équations polynomiales

TD 5

1 Théorème d'élimination

Exercice 1. Soit $I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ un idéal.

1. Montrer que $I_\ell = I \cap k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$ est un idéal de $k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$.
2. Montrer que l'idéal $I_{\ell+1} \subseteq k[x_{\ell+2}, \ldots, x_n]$ est le premier idéal d'élimination de $I_\ell \subseteq k[x_{\ell+1}, \ldots, x_n]$.
3. En déduire comment appliquer le théorème d'élimination pour éliminer plusieurs variables.

Exercice 2. Soient le système d'équations

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 & = 3 \\ x^2 + xy + y^2 & = 3 \end{cases}$$

et I l'idéal engendré par ces équations.

1. Déterminer des bases de $I \cap k[x]$, et de $I \cap k[y]$.
2. En déduire l'ensemble des solutions de ce système.

Exercice 3. Soit I l'idéal déterminé par les équations

$$x^5 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + 2y^2 = 5,\ xz = 1.$$

1. Calculer les idéaux I_1 et I_2.
2. Combien le système associé admet-il de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$?
3. Combien le système associé admet-il de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$?

Exercice 4. Utiliser le théorème d'élimination pour résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$ puis dans $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - y - 2z & = 0 \\ x^2 - 8y^2 + 10z - 1 & = 0 \\ x^2 - 7xy & = 0. \end{cases}$$

Exercice 5. Soient I et I' deux idéaux de $k[x_1, \ldots, x_n] = k[\underline{x}]$. Soit $J = \langle yI, (y-1)I' \rangle \in k[y, \underline{x}]$. Montrer que $I \cap I'$ est l'idéal d'élimination $J_{\underline{x}}$.

Exercice 6. Calculer, dans $\mathbb{Q}[x, y]$, l'intersection des idéaux

$$I = \left\langle x^2 - 2, x + y \right\rangle,\ I' = \left\langle x^2 - 2, x - y \right\rangle.$$

Exercice 7. Écrire un algorithme qui détermine l'intersection de deux idéaux.

2 Rappel sur les idéaux

Exercice 8. Soit I un idéal non trivial de $k[x_1, \ldots, x_n]$ et soit $\{y_1, \ldots, y_r\} \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. L'ensemble des variables $\{y_1, \ldots, y_r\}$ est dit *indépendant modulo* I si $I \cap k[\underline{y}] = \{0\}$. La dimension de I est définie par

$$\dim I = \max\{|\{y_1, \ldots, y_r\}|, \text{ avec } \{y_1, \ldots, y_r\} \text{ indépendant modulo } I\}.$$

1. Montrer qu'un idéal propre I est de dimension zéro si, et seulement si, il contient un polynôme non constant en chaque variable $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
2. Soit I un idéal propre de $k[x_1, \ldots, x_n]$.
   a) Si I est de dimension zéro, montrer que pour tout ordre admissible sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ et pour toute base de Gröbner G de I, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $g_i \in G$ avec $\mathrm{LM}(g_i) = x_i^{\alpha_i}$ pour un $\alpha_i > 0$.
   b) Supposons qu'il existe un ordre sur $k[x_1, \ldots, x_n]$ et une base de Gröbner G de I telle que pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe $g_i \in G$ avec $\mathrm{LM}(g_i) = x_i^{\alpha_i}$ pour un $\alpha_i > 0$. Montrer que $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.
   c) Si $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ est un k-espace vectoriel de dimension finie, montrer que I est de dimension zéro.
   d) En déduire que I est de dimension zéro si, et seulement si, $k[x_1, \ldots, x_n]/I$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 9. Soit I l'idéal de $\mathbb{Q}[x, y]$ engendré par $y^2 + x^2$ et $x^2 - 2$. Montrer que I est un idéal de dimension zéro.

Exercice 10. Quelle est la dimension de l'idéal I de $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ engendré par $x_1x_3 + x_3, x_2x_3 + x_3$?

Exercice 11. Écrire un algorithme qui teste si un idéal est de dimension 0.

Exercice 12. À un n-uplet $f = (f_1, \ldots, f_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]^n$ on associe une application

$$\begin{aligned} \varphi_f \ : \ & k^n \to k^n \\ a = (a_1, \ldots, a_n) & \mapsto (f_1(a), \ldots, f_n(a)) \,. \end{aligned}$$

On dit que φ_f est inversible s'il existe $g = (g_1, \ldots, g_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]^n$ tels que $\varphi_g \circ \varphi_f = \mathrm{Id}_{k^n}$, c.-à-d. si

$$g_i(f_1, \ldots, f_n) = x_i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Soit $I = \langle y_1 - f_1, \ldots, y_n - f_n \rangle \subseteq k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ muni de l'ordre lexicographique.

1. On suppose que la base de Gröbner réduite G de I est de la forme

   $$G = \{x_1 - g_1, \ldots, x_n - g_n\}.$$

   Montrer que φ_f est inversible.
2. On suppose dans cette question que φ_f est inversible d'inverse φ_g.
   a) Montrer que l'ensemble $G = \{x_1 - g_1, \ldots, x_n - g_n\}$ est un sous-ensemble réduit de I.
   b) Montrer que $I \cap k[y_1, \ldots, y_n] = \{0\}$.
   c) En déduire que G est une base de Gröbner réduite de I.
   d) Montrer que $g_i(f_1, \ldots, f_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$.
3. Soit $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ tels que $g_i(f_1, \ldots, f_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$.
   a) Montrer que $f_i(g_1, \ldots, g_n) = x_i$, $1 \leq i \leq n$.
   b) En déduire que $\varphi_g \circ \varphi_f = \mathrm{Id}_{k^n}$ implique $\varphi_f \circ \varphi_g = \mathrm{Id}_{k^n}$.