Élimination. Dimension d'une variété affine

TD 6

1 Élimination

Exercice 1. Utiliser le théorème d'élimination pour résoudre le système suivant dans $\mathbb{R}^3$ puis dans $\mathbb{C}^3$:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 - y - 2z = 0 \\ x^2 - 8y^2 + 10z - 1 = 0 \\ x^2 - 7xy = 0. \end{cases}$$

Exercice 2. Soit $f = x^4y^2 + x^2y^4 - x^2y^2 \in \mathbb{Q}[x, y]$. On cherche à calculer les valeurs critiques de f vu comme fonction polynomiale de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Soit J l'ideal $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$. Quelle est la dimension de J ? Peut-on calculer simplement les points critiques de f ?
2. En considérant l'idéal $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, f - t \right\rangle \subset \mathbb{Q}[x, y, t]$, trouver un polynôme de $\mathbb{Q}[t]$ dont l'ensemble des racines contient les valeurs critiques de f.

2 Dimension d'un idéal

Exercice 3. Soit $I \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ un idéal monomial tel que $\mathbb{V}(I) = n - 1$.

1. Montrer que les monômes de n'importe quel ensemble de générateurs de I on un facteur commun non constant.
2. On écrit $\mathbb{V}(I) = V_1 \cup \ldots, \cup V_p$, où les V_i sont des sous-espaces de coordonnées tels que $V_i \not\subset V_j$ pour $i \neq j$. On suppose de plus qu'un seul des V_i est de dimension $n - 1$.
   a) Quelle est la valeur maximale que peut prendre p ?
   b) Donner un exemple où ce p maximum est atteint.

Exercice 4. Soit I un idéal monomial de $k[x_1, \ldots, x_n]$.

1. Si $\mathbb{V}(I)$ est de dimension 0, que peut être $\mathbb{V}(I)$?
2. Montrer que $\mathbb{V}(I)$ est de dimension 0 si et seulement si pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, il existe $l_i \geq 1$ tel que $x_i^{l_i} \in I$.

Exercice 5. Soit I l'idéal de $k[x, y]$:

$$I = \langle x^3y, xy^2 \rangle .$$

Calculer la fonction de Hilbert ${}^aHF_I(s)$ de plusieurs façons différentes avec et sans Sage.

Exercice 6. Soit I l'idéal de $k[x, y, z]$:

$$I = \left\langle x^3yz^5, xy^3z^2 \right\rangle .$$

Calculer la fonction de Hilbert ${}^aHF_I(s)$.

Exercice 7. Soit I l'idéal de $k[x_1, \dots x_4]$:

$$I = \left\langle x_1x_3, x_1x_4^2, x_2x_3, x_2x_4^3 \right\rangle .$$

Calculer la fonction de Hilbert ${}^aHF_I(s)$.

Exercice 8. Soit $I_1 \subset I_2$ des idéaux de $k[x_1, \dots, x_n]$.

1. Montrer que $C(\langle \mathrm{LT}(I_2)\rangle) \subset C(\langle \mathrm{LT}(I_1)\rangle)$.
2. Montrer que pour tout $s \geq 0$, ${}^aHF_{I_2}(s) \leq {}^a HF_{I_1}(s)$.
3. Montrer que $\deg{}^a HP_{I_2} \leq \deg{}^a HP_{I_1}$.

Exercice 9. Soit k un corps algébriquement clos. Calculer la dimension des variétés affines définies par les idéaux suivants :

1. $I = \langle xz, xy - 1\rangle$.
2. $J = \left\langle zw - y^2, xy - z^3 \right\rangle$.

Exercice 10. On se donne des entiers $a_1, \dots, a_n$ strictement positifs et on considère l'idéal monomial $J = (X_1^{a_1}, \dots, X_n^{a_n})$. On se propose de calculer la fonction de Hilbert $h = {}^aHF_J$. On prolonge la fonction de Hilbert à $\mathbb{Z}$ par la valeur zéro sur les entiers négatifs.

1. Montrer qu'il existe un entier d_0 tel qu'on ait $h(d_0) \neq 0$ et $h(d) = 0$ pour tout $d > d_0$. Calculer d_0 et $h(d_0)$.
2. Montrer que pour tout $d \in \mathbb{Z}$ on a $h(d) = h(d_0 - d)$.
3. Calculer h quand $a_i = 2$ pour tout $i \in [1, n]$.
4. Calculer h quand $n = 2$, $a_1 \leq a_2$.

Exercice 11. Montrer qu'un point $p = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ est une variété affine de dimension zéro.

Exercice 12. Soit k un corps algébriquement clos et $I = \langle xy, wz\rangle \in k[x, y, z]$.

1. Montrer que $I \cap k[x] = 0$ mais que $I \cap k[x, y]$ et $I \cap k[x, z]$ ne sont pas nuls.
2. Montrer que $I \cap k[y, z] = 0$ mais que $I \cap k[x, y, z] \neq 0$.
3. Quelle est la dimension de $V(I)$?